ÁLGEBRA DE BOOLE: DEL SILOGISMO ARISTOTÉLICO A LOS CIRCUITOS INTEGRADOS

Javier Borge Holthoefer
holthoefer@menta.net

ÍNDICE:

A. INTRODUCCIÓN p.3

B. ÁLGEBRA DE CONJUNTOS Y CÁLCULO PROPOSICIONAL p.5

I. CONJUNTOS Y ELEMENTOS p.5
II. PROPOSICIONES Y CONECTIVAS p.5
III. UNIÓN E INTERSECCIÓN p.7
IV. CONJUNTO UNIVERSAL, CONJUNTO VACÍO, CONJUNTO COMPLEMENTARIO p.8
V. LEYES DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS Y DEL CÁLCULO PROPOSICIONAL p.8
VI. FUNCIONES Y TABLAS DE VERIFICACIÓN p.9

C. ÁLGEBRA DE BOOLE p.10

I. INTRODUCCIÓN p.10
II. POSTULADOS Y TEOREMAS p.10

D. DE BOOLE A LA ELECTRÓNICA DIGITAL p.13

I. PUERTAS LÓGICAS p.13
II. FUNCIONES BOOLEANAS p.15
III. IMPLEMENTACIÓN DE FUNCIONES BOOLEANAS p.16
IV. MÉTODOS TABULARES DE SIMPLIFICACIÓN p.17

ANEXO I p.19

ANEXO II p.22

BIBLIOGRAFÍA p.25

A. INTRODUCCIÓN

Ocurre a veces que la importancia de un acontecimiento histórico se mide no tanto por la difusión de que éste gozó, como por las consecuencias que trajo consigo. Así, hoy sabemos que la guerra entre Francia y Alemania en a finales del siglo XIX fue deliberadamente provocada por el canciller prusiano Bismarck: falsificó intencionadamente el despacho del embajador Ems, dándole un carácter ofensivo, agresivo, hacia la opinión pública francesa para provocar una reacción de furor en ésta a la vez que la guerra. Tenemos, pues, un acontecimiento relativamente insignificante (manipulación de un informe) que desemboca en una guerra, que a su vez da como resultado la unificación de Alemania[1].

El ejemplo de Bismarck resulta especialmente interesante porque raramente encontramos en la Historia de la Lógica algo que pueda compararse; es decir, raramente un logro en Lógica (parecido al ejemplo de Bismarck en cuanto a difusión se refiere) tiene un impacto de magnitud similar a la que tuvo en la Historia (general) contemporánea el surgimiento del estado alemán. ¿Cuál podría ser ese logro? A mi entender, el álgebra de Boole.

Fundamentemos un poco este razonamiento. De lo dicho arriba se desprende que cualquier hallazgo en Lógica es insignificante. Que nadie se alborote: con ello quiere decirse que tales hallazgos pasan tan inadvertidos (o más) para la gran mayoría como la falsificación del despacho de Ems por parte de Bismarck. La falta de atención a los logros en Lógica ocurre incluso en los círculos más próximos a ella: buena parte de los filósofos de la ciencia del siglo XX (a excepción de Lakatos) han elaborado sus epistemologías respectivas tomando como referente principal a la física. Así sucedió con el Círculo de Viena, con Popper, con la Concepción Heredada y con Kuhn. Para muchos de estos filósofos parecería a veces que las matemáticas, la lógica y, en general, las ciencias formales caen fuera del saber científico, por no satisfacer los sucesivos criterios de demarcación que dichos autores han ido proponiendo, o, en otros casos, por no ser las matemáticas un saber empírico[2].

Para completar el paralelismo Bismarck – Boole queda solamente mostrar la huella que ha dejado la obra del último. Esto no es muy complicado: basta que observemos el mecanismo que rige un semáforo o el funcionamiento de un sistema informático para darnos cuenta que el álgebra de Boole juega un papel nada despreciable no ya en el ámbito específico de la Lógica, sino en la civilización tal y como la conocemos.

[1] El ejemplo está tomado de Aron, R. *Lecciones sobre la historia: cursos del Collège de France*. Fondo de Cultura Económica, México, 1996.
[2] Echeverría, J. en *Introducción a la Metodología de la Ciencia: la Filosofía de la Ciencia en el siglo XX*. Ediciones Cátedra, Madrid, 1999.

Hasta aquí he hablado únicamente de la proyección "hacia adelante" del trabajo de Boole, dejando a un lado sus raíces históricas (*nada surge de la nada*, Parménides *dixit*) que el título de este artículo insinúan. De la relación entre el Silogismo y el Álgebra de Boole nos ocupamos en la monografía *El Silogismo a través de la Historia*. De otras aportaciones de Boole relacionadas con el Cálculo Proposicional nos ocuparemos en la sección B.

En cuanto al alcance y estructura de este estudio, hay que decir que es meramente divulgativo. La sección B está dedicada primero a resaltar aspectos básicos de la Teoría de Conjuntos y del Cálculo Proposicional, para luego ver en qué sentido Boole colaboró en su interrelación, desarrollo o profundización; asimismo, se intenta poner en contacto esta Teoría y este Cálculo con su despliegue práctico, que desemboca en los dispositivos lógicos bajo la forma de un Álgebra de Boole (sección D). La sección C se limita a la enunciación de los teoremas y postulados del Álgebra de Boole, con algunas apreciaciones históricas. Por último, he añadido un Anexo en el que se utilizan las representaciones diagramáticas de Venn para comprobar (que no *demostrar*) la validez de las leyes del Álgebra de Conjuntos. Me ha parecido coherente incluir este Anexo porque con Venn terminó mi anterior artículo dedicado a la Historia de la Lógica, trazando así una linea que une ambos trabajos.

Fruto de todo esto, el trabajo tiene una considerable envergadura. Por esta razón, se debe afrontar su lectura de un modo selectivo. Si uno es, por ejemplo, experto en Electrónica, y está interesado en conocer los fundamentos históricos y teóricos del Álgebra de Boole, deberá leerse la sección B (y algo de la C), descartando la última parte. Por el contrario, si uno está familiarizado con la Lógica y su Historia, quizá le llamen más la atención los aspectos prácticos en que han desembocado los trabajos de Boole. Así, mejor será que pase directamente a la lectura de la última sección.

Por último, para quien desee leer la totalidad del trabajo, se ha procurado que éste goce de cierta consistencia. El hilo conductor al que debe agradecerse tal consistencia no es otro que Kneale, y su obra *El desarrollo de la lógica*[3]. En esta obra se encuentran todos los aspectos aquí tratados, además de otros (como las relaciones entre Boole y el cálculo de probabilidades). Mi tarea ha consistido en seleccionar y ampliar aquellos aspectos que son más relevantes y han sido más fructíferos para el surgimiento de nuestra actual "era informática".

[3] Ver BIBLIOGRAFÍA

B. TEORÍA DE CONJUNTOS y CÁLCULO PROPOSICIONAL

Enunciado general: el Cálculo Proposicional (CP) y la Teoría de Conjuntos (TC) son ambos instancias de un sistema algébrico denominado **Álgebra de Boole.**

Para ilustrar los nexos que los unen, intercalaré explicaciones acerca de uno (CP) y de la otra (TC). Espero que ello no sea en detrimento de una fácil comprensión.

I. CONJUNTOS Y ELEMENTOS (TC).

Comencemos ahora por la teoría de conjuntos. El concepto de conjunto surge de manera natural en muchas situaciones de la vida: películas de guerra, novela rosa, pescaderías... Si llevamos a cabo un sencillo proceso de abstracción, veremos que podemos definir un conjunto de dos modos distintos:

- Por extensión: enumeración simple de sus elementos.
- Por comprensión: definir una propiedad no ambigua y determinada.

Veamos un ejemplo:

Supongamos un conjunto que comprende los componentes del grupo musical “The Beatles”. Definiríamos tal conjunto por *extensión* de la siguiente manera:

S= {Paul McCartney, John Lennon, George Harrison, Ringo Starr}

Definido por *comprensión*, el conjunto quedaría así:

S={x / x pertenezca al grupo musical “The Beatles”}

II. PROPOSICIONES Y CONECTIVAS (CP)

Definimos una proposición como un aserto que puede ser cierto o falso, pero no ambas cosas a la vez. Tales proposiciones pueden ser simples (“Los gatos comen pescado”) o compuestas (“Los gatos comen pescado *y* los perros comen carne”). Como es sabido, las oraciones simples se unen mediante conectivas. De ellas, cuatro son las más importantes:

CONJUNCIÓN	y	$\wedge$
DISYUNCIÓN	o	$\vee$
CONDICIONAL	Si... entonces	$\rightarrow$
BICONDICIONAL	Si y sólo si	$\leftrightarrow$

Además de estas conectivas, en el lenguaje ordinario se usa a menudo la negación:

NEGACIÓN	no	$\neg$

Por supuesto, en el lenguaje ordinario (natural) usamos un número más amplio de conectivas, tales como “a menos que”, “pero”... Ante esto, podríamos establecer notaciones distintas para cada una de ellas. Por otro lado, parece (es) más conveniente intentar reducir (sin distorsión de su uso común) tales conectivas a las cuatro establecidas. Considérese este ejemplo:

“El café es agradable, a menos que se le añada azúcar” (simbólicamente, *p* a menos que *q*). El significado de la oración es que si añadimos azúcar, el café no es agradable; es decir: “El café es agradable si no añadimos azúcar”, o bien “*Si* no añadimos azúcar, *entonces* el café es agradable”. O lo que es lo mismo: $\neg q \rightarrow p$, con lo cual hemos logrado nuestro objetivo.

III. UNIÓN E INTERSECCIÓN

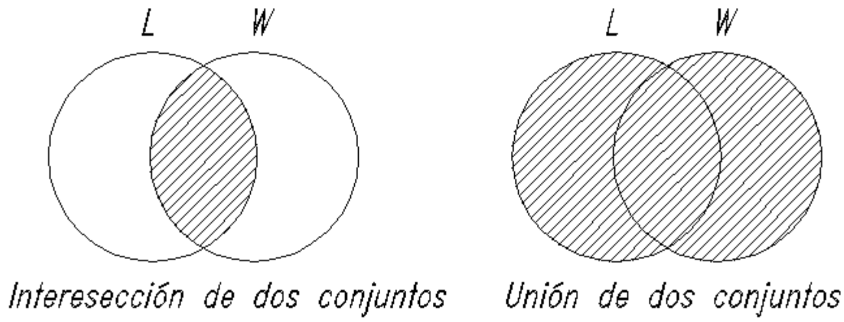
Aquí comenzamos a percibir el modo en que Boole unifica el CP y la TC.

Unión e intersección son las dos operaciones básicas en el álgebra de conjuntos.

La unión entre dos conjuntos L y W se define como el conjunto formado por todos los elementos de L junto con todos los elementos de W.

La intersección entre dos conjuntos L y W se define como el conjunto que comprende sólo aquellos elementos que L y W tienen en común.

Lo cierto es que tanto unión como intersección quedan mucho más claras a través de una ilustración:



El sombreado representa $L \cap W$ El sombreado representa $L \cup W$

Si bien ya Leibniz, en el s.XVII, entrevió la existencia de una cierta analogía entre la intersección y la unión, de una parte, y el producto y la suma de números, por otra, fueron las aportaciones de Boole las que clarificaron tales relaciones, ampliándolas además a las conectivas $\wedge$ (conjunción) y $\vee$ (disyunción) de la Lógica formal. De este modo, la intersección de conjuntos se expresa también con esta simbología:

$$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$$

La conjunción:

$$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \vee x \in B\}$$

IV. CONJUNTO UNIVERSAL, CONJUNTO VACÍO, CONJUNTO COMPLEMENTARIO

Al definir un conjunto L no sólo se determinan sus elementos, sino también los que no lo son. Sin embargo, esto puede acarrear algún problema. Por ejemplo, pensemos en el conjunto de los números enteros, Z. Si hacemos caso de lo dicho hasta ahora, Z no define sólo el conjunto de los números enteros; define también un conjunto Z', al que definimos como "todo aquello que no es un número entero". Hasta aquí, todo parece correcto: el conjunto Z' contiene, por ejemplo, el número ¾, la raíz cuadrada de 2, ... pero también incluye los templos hindúes a orillas del Ganges, o las zapaterías del barrio gótico de Barcelona. Para evitar complicaciones, resulta más adecuado restringir los elementos considerados a un conjunto menor. En nuestro caso, servirá el conjunto de los números reales (⌡). Con el fin de obtener esta restrición postulamos un conjunto universal E que definimos como el conjunto de todos los elementos que consideramos. El complementario de un conjunto es entonces el complementario respecto de este conjunto universal. *La interpretación de este conjunto universal por parte de Boole le llevó a identificar tal conjunto con el valor "1".*

Queda por determinar qué es un conjunto vacío. En general, la intersección de dos conjuntos sería siempre un conjunto, excepto cuando no tienen elementos comunes. Este caso especial se elimina postulando un conjunto vacío, &. *La interpretación de este conjunto universal por parte de Boole le llevó a identificar tal conjunto con el valor "0".*

Esta asignación de valores 1-0 a los conjuntos E y & tiene importantes consecuencias no sólo en el ámbito de la Lógica senetencial sino también en ámbitos que aquí no tratamos, como la teoría de la probabilidad (diremos sólo que cualquier valor de probabilidad se encuentra entre 0 y 1).

Para mostrar algunas de estas consecuencias, consideremos el modo de Boole de asignar valores de verdad a las proposiciones: hoy día expresamos la certeza de un enunciado asignándole el valor "1", y su falsedad con el valor "0". Pues bien, en Bochénski[4] leemos:

> *"Si nos limitamos a la consideración de una sentencia dada X, dejando de lado toda otra consideración, se podrán imaginar sólo dos casos, a saber, primero, que la sentencia sea verdadera, y la segunda, que sea falsa. Como estos casos componen el universo de la sentencia, y el primero se representa por el símbolo x, el segundo se representará por el símbolo (1-x)"*

[4] Ver BIBLIOGRAFÍA

V. LEYES DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS y DEL CÁLCULO PROPOSICIONAL

Para convencernos del enunciado general arriba expuesto, según el cual el CP y la TC pueden reducirse a un Álgebra de Boole, veamos una tabla comparativa que contemple las leyes del álgebra de conjuntos y del cálculo proposicional (para darnos cuenta de que tratan, en esencia, de lo mismo):

ÁLGEBRA DE CONJUNTOS	CÁLCULO PROPOSICIONAL
Leyes conmutativas para la intersección y la unión X ∩ Y = Y ∩ X X U Y = Y U X	*Ley conmutativa* $p\wedge q \leftrightarrow q\wedge p$ $p\vee q \leftrightarrow q\vee p$
Ley asociativa para la intersección X ∩ (Y ∩ Z) = (X ∩ Y) ∩ Z	*Ley asociativa para la conjunción* $p\wedge(q\wedge r) \leftrightarrow (p\wedge q)\wedge r$
Ley asociativa para la unión X U (Y U Z) = (X U Y) U Z	*Ley asociativa para la disyunción* $p\vee(q\vee r) \leftrightarrow (p\vee q)\vee r$
Ley distributiva de la intersección respecto a la unión X ∩ (Y U Z) = (X ∩ Y) U (X ∩ Z)	*Ley distributiva de la conjunción respecto a la disyunción* $p\wedge(q\vee r) \leftrightarrow (p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
Ley distributiva de la unión respecto a la intersección X U (Y ∩ Z) = (X U Y) ∩ (X U Z)	*Ley distributiva de la disyunción respecto a la conjunción* $p\vee(q\wedge r) \leftrightarrow (p\vee q)\wedge(p\vee r)$
Ley de tautología (ley idempotente) X U X = X X ∩ X = X	*Ley de tautología* $(p\vee p) \leftrightarrow p$ $(p\wedge p) \leftrightarrow p$
Ley de complementación X U X’ = E X ∩ X’ = &	*Leyes de negación (complementación)* $\lvert p\vee\neg p\rvert = 1$ $\lvert p\wedge\neg p\rvert = 0$
Leyes de absorción X U (X ∩ Y) = X X ∩ (X U Y) = X	*Leyes de absorción* $p\vee(p\wedge q) \leftrightarrow p$ $p\wedge(p\vee q) \leftrightarrow p$
Leyes De Morgan (X U Y)’ = X’ ∩ Y’ (X ∩ Y)’ = X’ U Y’	*Leyes de De Morgan* $\neg(p\vee q) \leftrightarrow \neg p\wedge\neg q$ $\neg(p\wedge q) \leftrightarrow \neg p\vee\neg q$
Leyes con E *y* & & U X = X E ∩ X = X E U X = E & ∩ X = & E’ = & &’ = E	*Leyes con* 0 *y* 1 $0\vee p \leftrightarrow p$ $1\wedge p \leftrightarrow p$ $1\vee p \leftrightarrow 1$ $0\wedge p \leftrightarrow 0$ $\neg 1 \leftrightarrow 0$ $\neg 0 \leftrightarrow 1$

VI. FUNCIONES Y TABLAS DE VERIFICACIÓN

En el apartado II hemos construido una notación mediante la cual cualquier proposición se puede escribir en términos de las proposiciones simples que la constituyen y de varias conectivas lógicas. La cuestión que nos planteamos ahora es si estas expresiones son funciones (entendiendo función como la expresión de unas variables dadas cuyo valor queda unívocamente determinado para valores de las variables).

Hemos dicho ya que una proposición *p* puede ser cierta o falsa, pero no ambas cosas a la vez. Si consideramos *p* = 1 cuando la proposición *p* es cierta, y *p* = 0 cuando es falsa, concluímos que, en efecto, una proposición simple es una función (que toma los valores 0 ó 1).

Si esto vale para las proposiciones simples, debe valer también para las complejas. Los valores que tomará una proposición compleja dependerá del tipo de conectiva(s) que une sus partes simples. Debido a la multitud de combinaciones posibles, se usan “tablas de verificación” para exponerlas:

Variables		Funciones proposicionales			
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Todas las conectivas enlazan pares de proposiciones que satisfacen la condición esencial de una función (ningún valor del conjunto inicial tiene más de una imagen). Toda función proposicional se puede describir completamente mediante su tabla de verificación (o “de verdad”, como suele llamarse).

Esta consideración del CP como función tiene en parte su origen en la obra *Mathematical Analysis of Logic* de Boole, donde describe el despliegue formal de su sistema mediante lo que el llama *development* (expansión). El mismo Boole, no consciente de la importancia de tal procedimiento, lo considera como un caso degenerado del teorema de MacLaurin. Para constatar la importancia real de las “expansiones” (funciones, al fin y al cabo), véase el apartado de implementación de funciones booleanas.

C. ÁLGEBRA DE BOOLE

I. INTRODUCCIÓN

En la sección anterior hemos visto que las aportaciones de Boole jugaron un papel primordial para alcanzar la unificación del CP y la TC. En esta sección nos “limitaremos” a presentar el cuerpo del Álgebra de Boole tal y como él lo concibió.

Para ello, es necesario antes distinguir antes entre “operaciones binarias” y “operaciones unitarias”, aunque ya lo hayamos intuído implícitamente con anterioridad:

a. OPERACIONES BINARIAS

Una operación binaria (°) en un conjunto A es una operación tal que si a,b son elementos del conjunto A, también lo es a°b.

Por ejemplo, en aritmética, ¿es la división (4) una operación binaria? Puede o no serlo, depende del conjunto que consideremos. Si el conjunto considerado es ⌡$^{+}$, entonces 4 es una operación binaria. Si, por el contrario, el conjunto a considerar es Z, entonces 4 no resulta ser una operación binaria.

b. OPERACIONES UNITARIAS

Una operación unitaria (~) sobre un conjunto A es una operación tal que si a es un elemento de A, también lo es ~a.

Volvamos a la aritmética para elaborar un ejemplo. ¿es la operación “tomar el valor negativo de” (–) una operación unitaria? Si consideramos tal operación sobre el conjunto Z^{+}, entonces (–) no es una operación unitaria; si, por el contario, la consideramos sobre todos los números enteros, Z, (–) sí cumple con el requisito para ser operación unitaria.

II. POSTULADOS Y TEOREMAS DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

Aunque pueda parecer contradictorio, aquí no enunciaremos los postulados y teoremas que el propio Boole presentó. En cambio, ofrecemos los que Huntington pensó para *un* Álgebra de Boole en 1904. De nuevo, es Kneale quien así lo aconseja:

“Aunque el sistema de Boole permite su fácil manipulación, hay que admitir que contiene defectos no sólo desde el punto de vista de la elegancia, sino asimismo de rigor. [...] A lo largo de medio siglo tras la publicación de las *Laws of Thought*, todas estas deficiencias serían subsanadas por los seguidores de Boole. Jevons inició las reformas en 1864 con su Pure Logic, or the Logic of Quality apart from Quantity. [...] Sin embargo, el paso más importante en esta dirección consiste en la presentación del cálculo en forma estrictamente axiomática. Mientras que Boole se había contentado con caracterizar su sistema mediante un único principio que pareciera diferenciarlo del álgebra numérica ordinaria, sus sucesores intentaron explicar todos sus presupuestos. Donde mejor cabe estudiar los resultados de esta empresa es en los trabajos de E.V. Huntington (*Sets of independent Postulates for the Algebra of Logic*)"

Sin más preámbulos, veamos cuáles son esos postulados y teoremas:

El Álgebra de Boole es una estructura algebraica definida por dos operadores binarios ($\oplus$ y M) de tal forma que satisfacen los siguientes postulados:

P1 : POSTULADO DE LOS ELEMENTOS DE IDENTIDAD

(a) Un elemento de identidad con respecto al operador $\oplus$ es designado por 0 y cumple:

$x \oplus 0 = 0 \oplus x = x$, siendo $x \in B$

(b) Un elemento de identidad con respecto al operador M es designado por el símbolo 1 y cumple:

$x M 1 = 1 M x = x$, siendo $x \in B$

P2 : PROPIEDAD CONMUTATIVA

(a) Conmutatividad con respecto al operador $\oplus$

$x \oplus y = y \oplus x$

(b) Conmutatividad con respecto al operador M

$x M y = y M x$

P3 : PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

(a) Distributividad con respecto al operador $\oplus$

$x M (y+z) = x M y + x M z$

(b) Distributividad con respecto al operador M

$x \oplus (y M z) = (x \oplus y) M (x \oplus z)$

P4 : AXIOMAS DEL COMPLEMENTO

(a) $x \oplus x' = 1$

(b) $x \, M \, x' = 0$

T1 : TEOREMA DE LOS ELEMENTOS DOMINANTES:

(a) $x \oplus 1 = 1$

(b) $x \, M \, 0 = 0$

T2 : TEOREMA DE IDEMPOTENCIA

(a) $x \oplus x = x$

(b) $x \, M \, x = x$

T3 : LEY INVOLUTIVA

$(x')' = x$

T4 : TEOREMA DE ABSORCIÓN

(a) $x \oplus (x \mathrm{M} y) = x$
(b) $x \mathrm{M} (x \oplus y) = x$

T7 : LEYES DE MORGAN

(a) $(x \oplus y)' = x' \mathrm{M} y'$
(b) $(x \mathrm{M} y)' = x' \oplus y'$

Ley de Morgan generalizada

(a) $(x \oplus y \oplus z \oplus ...)' = x' \mathrm{M} y' \mathrm{M} z' \cdot .....$
(b) $(x \mathrm{M} y \mathrm{M} z \cdot ....)' = x' \oplus y' \oplus z' \oplus ...$

OBSERVACIONES:

1) Todos los postulados y teoremas presentados tienen su equivalente en las leyes de la TC y el CP (ver tabla en la página 9).
2) Los teoremas del álgebra de Boole son demostrables, a diferencia de los del álgebra convencional, por el *método de inducción completa*. La inducción completa sólo puede darse si se comprueba que la relación entre los elementos que el teorema define se cumple en todos los casos. Para realizar esto, se utilizan las *tablas de verdad*.
3) Los postulados y teoremas del álgebra han sido listados a pares, parte (a) y parte (b). Una parte puede obtenerse a partir de la otra mediante el intercambio de los elementos unitarios (0 y 1) y los operadores binarios ($\oplus$ y M). Esto se conoce como el *Principio de dualidad*, gracias al cual cualquier apartado de los postulados puede obtenerse a partir del otro sin más que intercambiar los operadores binarios y los elementos unitarios.

Los postulados de Huntington no han sido los únicos intentos de mejorar el Álgebra de Boole. Otros intentos conocidos en el ámbito de las matemáticas son los de Birkhoff y MacLane[5]. Por supuesto, me abstengo de reproducirlos.

[5] *Survey of Modern Algebra*, cap. XI, 4.

D. DE BOOLE A LA ELECTRÓNICA DIGITAL

Debido a que los computadores trabajan con información binaria, la herramienta matemática adecuada para el análisis y diseño de su funcionamiento es el Álgebra de Boole en su forma bivalente, aunque fue desarrollada inicialmente para el estudio de la lógica. Ha sido a partir de 1938, fecha en que C.E. Shanon publicó su obra *Análisis simbólico de circuitos con relés*, estableciendo los primeros conceptos de la actual teoría de la conmutación, cuando se ha producido un aumento considerable en el número de trabajos de aplicación del Álgebra de Boole a los computadores digitales. Hoy en día, esta herramienta resulta fundamental para el desarrollo de los computadores ya que, con su ayuda, el análisis y síntesis de combinaciones complejas de circuitos lógicos puede realizarse con rapidez y eficacia.

I. PUERTAS LÓGICAS

Para que el Álgebra de Boole se torne realmente útil de cara a la electrónica y la computación, ésta debe plantearse como un álgebra bivalente. No hay acuerdo acerca de si tal Álgebra "nació" bivalente, o el ser bivalente es una restricción añadida para facilitar su aplicación. A este respecto, Kneale y Bochénski mantienen opiniones contrapuestas[6].

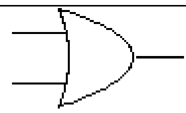
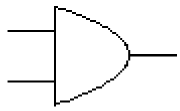
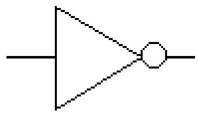
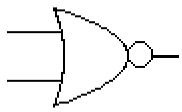
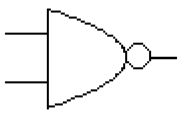
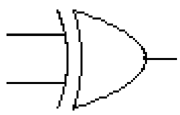
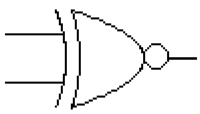
En cualquier caso, este álgebra bivalente aplicada tiene las mismas tablas de verdad del CP expuestas anteriormente, cambiándoles sólo la nomencalatura: donde decíamos "disyunción" ($\vee$), ahora decimos OR; donde decíamos "conjunción" ($\wedge$), decimos AND; donde decíamos "negación" ($\neg$), ahora decimos INVERSOR o NOT. Veamos de nuevo la tabla con el vocabulario renovado:

Variables		Funciones proposicionales	
x	y	x + y (operación OR)	x · y (operación AND)
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	0

6 La postura de Kneale puede verse en la página 382 de *El desarrollo de*... La de Bochénski, en la página 312 de *Historia de*...(VER BIBLIOGRAFÍA)

x’ (operación NOT)	
x	x’
1	0
0	1

Por supuesto, existen otros operadores además de estos. Véase la siguiente tabla con todos los operadores y su símbolo más extendido (de este modo nos avanzamos un poco al contenido de la siguiente sección, dedicado íntegramente a la aplicación del álgebra de Boole dentro de la electrónica) :

FUNCIÓN	SÍMBOLO	ECUACIÓN LÓGICA
Sumadora OR		S = a + b
Multiplicadora AND		S = a · b
Inversora NOT		S = a’
Sumadora negadora NOR		S = (a + b)’
Multiplicadora negadora NAND		S = (a · b)’
Suma exclusiva OR EXCLUSIVA		S = a’ ·b + a · b’
Suma exclusiva negada NOR EXCLUSIVA		S = a ·b + a’ · b’

II. FUNCIONES BOOLEANAS

La aplicación más directa de las puertas lógicas es la combinación entre dos o más de ellas para formar circuitos lógicos que responden a funciones booleanas (las cuales, hemos visto ya [sección B, apartado VI], fueron minusvaloradas por Boole). Una función lógica hace que una o más salidas tengan un determinado valor para un valor determinado de las entradas.

Tales funciones o ecuaciones consisten en un número finito de constantes (0, 1) y variables conectados por los operadores (+), (·) y (') de forma que (+) y (·) no pueden estar adyacentes nunca. Cada expresión de conmutación de n-variables describe una única función de conmutación de n-variables.

Se pueden tomar como ejemplos las funciones de la tabla de la página anterior, correspondientes a los distintos operadores lógicos.

Por supuesto, hay ecuaciones equivalentes. Dos expresiones de conmutación A y B se dicen equivalentes (A=B) si ellas describen la misma función de conmutación.

Ejemplo : *Sea* F = a+b·c' *y* G = (a+b)·(a+b'+c')

a	b	c	F	G
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

f y g son equivalentes porque describen la misma tabla de verdad.

III. IMPLEMENTACIÓN DE FUNCIONES BOOLEANAS

Para el diseño de circuitos digitales sólo cabe hacer la precisión del siguiente convenio:

- **Presencia de tensión**: 1
- **Ausencia de tensión**: 0

Con este criterio, podemos proceder a la *implemantación de funciones*.

Dado un sistema combinacional cualquiera compuesto de x entradas y una salida (F, la función a implementar) podemos utilizar dos tipos de ecuaciones (formas canónicas de las ecuaciones booleanas):

- Ecuación *minterms*: obtendremos la suma de productos de las variables "entrada" cuyas combinaciones hacen 1 la función. Convenio a aplicar: "0" variables negada; "1" variable sin negar. La implementación se realizará mediante puertas NAND.
- Ecuación *maxterms*: obtendremos el producto de las sumas de las variables "entrada" cuyas combinaciones hacen 0 la función. Convenio a aplicar: "1" variable negada; "0" variable sin negar. La implementación se realizará mediante puertas NOR.

Lo que se logra con estas ecuaciones es la expresión correspondiente a una tabla de verdad dada. Tal expresión es, además, simplificable algebraicamente mediante los postulados y teoremas enunciados más arriba (aunque la simplificación se obtiene casi siempre por métodos tabulares [por el simple motivo de que es más fácil] como veremos en el apartado siguiente). Por ejemplo, intentemos obtener la ecuación de la siguiente tabla de verdad:

a	b	c	F
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Si queremos obtener la ecuación de esta tabla en la forma “suma de productos” (*minterms*), debemos fijarnos en los “1” de la columna de F: el primero que encontramos (1ª fila) viene dado por el producto a·b·c (en esa fila, a = 1, b = 1 y c = 1). Aplicando esta sencilla forma de proceder, la ecuación queda:

F = (a·b·c)+(a·b’·c’)+(a’·b·c)+(a’·b·c’)

Como “producto de sumas” (*maxterms*) debemos fijarnos en los “0” de la columna de F. Hay que tener en cuenta que aquí “1” es la variable negada.

F= (a’+b’+c)·(a’+b+c’)·(a+b+c’)·(a+b+c)

IV. MÉTODOS TABULARES DE SIMPLIFICACIÓN DE ECUACIONES

El recurso a las tablas para la simplificación de ecuaciones booleanas es, como ya se ha dicho, fruto de su mayor simplicidad. Aunque existen otros métodos (como las tablas de Quine-McCluskey[7]), nos limitaremos a explicar someramente el método conocido como “mapas de Karnaugh”. Éstos se pueden utilizar para simplifcar funciones de dos a seis variables, aunque habitualmente sólo se los emplee para funciones de dos a cinco variables.

El método gráfico de Karnaugh, desarrollado en *The Map Method for Synthesis of Combinatorial Logic Circuits* (AIEE, vol. 72, 1953), se basa en otro de E. W. Veitch publicado en *A Chart Method for Simplifying Truth Functions* (ACM, 1952). Esta técnica se convirtió rápidamente en la herramienta más potente entre los diseñadores de computadores y expertos en lógica digital durante la década de los 50.

Entrando en materia, los mapas están constituídos por una cuadrícula en forma de encasillado cuyo número de casillas depende del número de variables que tenga la función a simplificar. Cada una de las casillas que forman el mapa puede representar términos tanto *minterms* como *maxterms*. Veamos un ejemplo de mapa con tres variables en términos de *maxterms*, siguiendo la tabla de la página 17:

c \ a b	0 0	0 1	1 1	1 0
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

7 El algoritmo de Quine se halla en *The problem of Simplifying Truth Functions* (1952), y fue modificado por Edward J McCluskey (Jr.) *Minimization of Boolean Functions*, en Bell Syst. Tech. Journal 1956

El principio de simplificación de los mapas se basa en una de las leyes del Álgebra de Boole:

$$a \cdot b + a \cdot b' = a$$

Como podemos observar, todas las casillas contiguas se caracterizan por diferenciarse sólo en una variable, que se encuentra negada en una de ellas y sin negar en la otra. Tal característica, propia de todos los mapas de Karnaugh, permiten aplicar la ley anterior.

Para proceder a la simplificación, debemos fijarnos sólo en las casillas que contienen “1” (si simplificaremos por *maxterms*), o las que contienen “0” (si simplificaremos por *minterms*). Aquí trabajaremos con las casillas “1”.

En términos generales, podemos afirmar que en los mapas de Karnaugh se pueden simplificar entre sí, por sus variables comunes, los siguientes grupos de casillas:

- Grupos de 2, 4, 8 ... casillas contiguas según los ejes coordenados, *nunca según ejes diagonales*.
- Los grupos de casillas de los bordes del mapa.
- El grupo de casillas constutuído por las cuatro esquinas del mapa.

Por lo tanto, en nuestro ejemplo, procederíamos del siguiente modo:

c \ ab	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

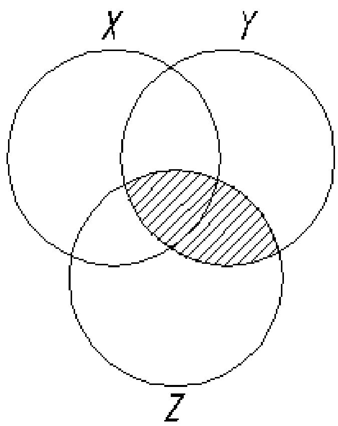
La ecuación correspondiente a la 2ª columna es: a’·b·c’ + a’·b·c Sacando factor común, queda (a’·b)·(c+c’). Puesto que c+c’ = 1, según el cuarto postulado de Huntington, entonces la 2ª columna queda a’·b. Si procedemos del mismo modo en el grupo de la 2ª fila y con la casilla del borde derecho de la 1ª fila, resulta la función ya simplificada F = a’·b + b·c + a·b’·c

ANEXO I: Comprobación de algunas leyes del álgebra de conjuntos mediante representaciones diagramáticas (Venn)

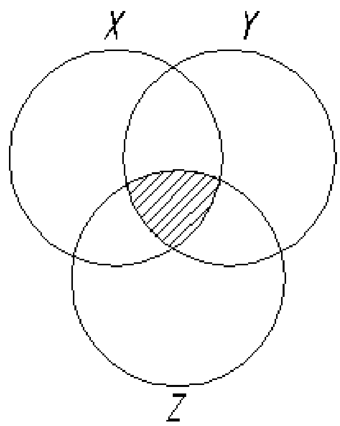
- Ley asociativa para la intersección:

$$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$$

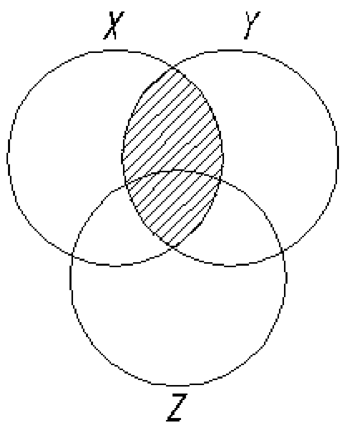
Diagramas:



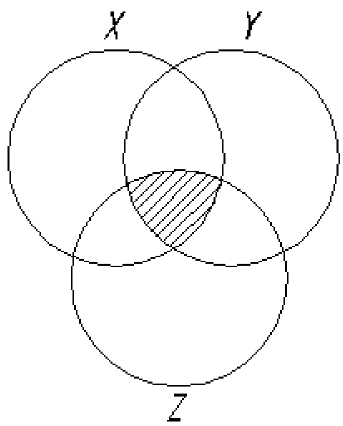
El sombreado representa Z ∩ Y



El sombreado representa X ∩ (Z ∩ Y)



El sombreado representa X ∩ Y

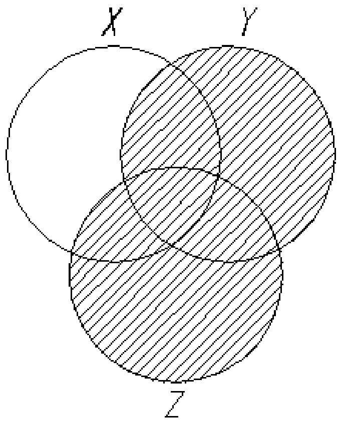


El sombreado representa (X ∩ Y) ∩ Z

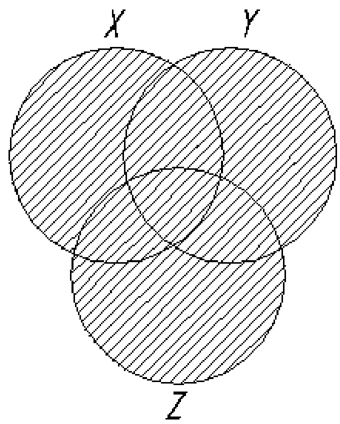
- Ley asociativa para la unión:

X U (Y U Z) = (X U Y) U Z

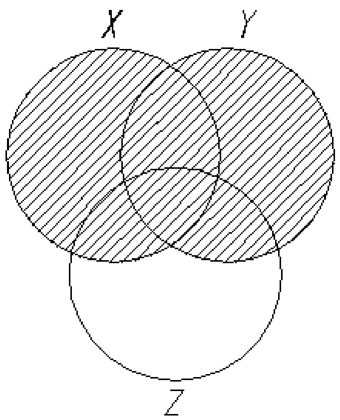
Mediante diagramas:



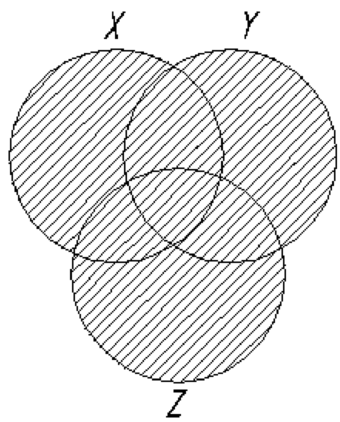
El sombreado representa Y U Z



El sombreado representa X U (Y U Z)



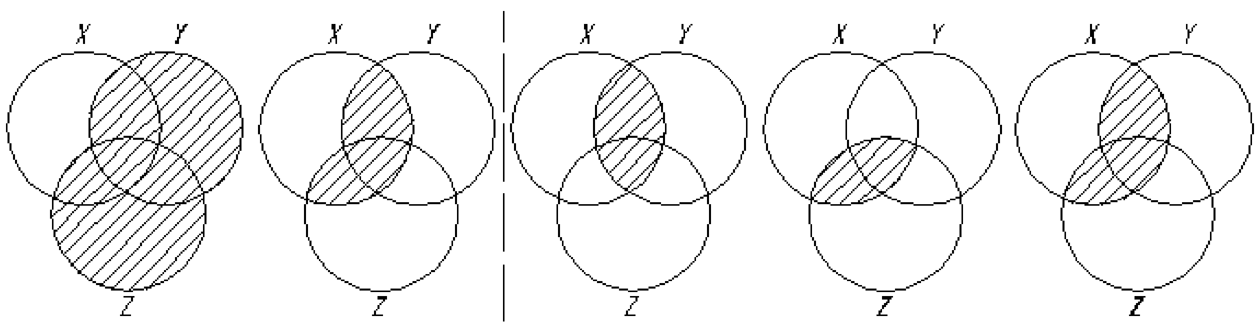
El sombreado representa X U Y



El sombreado representa (X U Y) U Z

- Ley distributiva de la intersección respecto a la unión:

X ∩ (Y U Z) = (X ∩ Y) U (X ∩ Z)

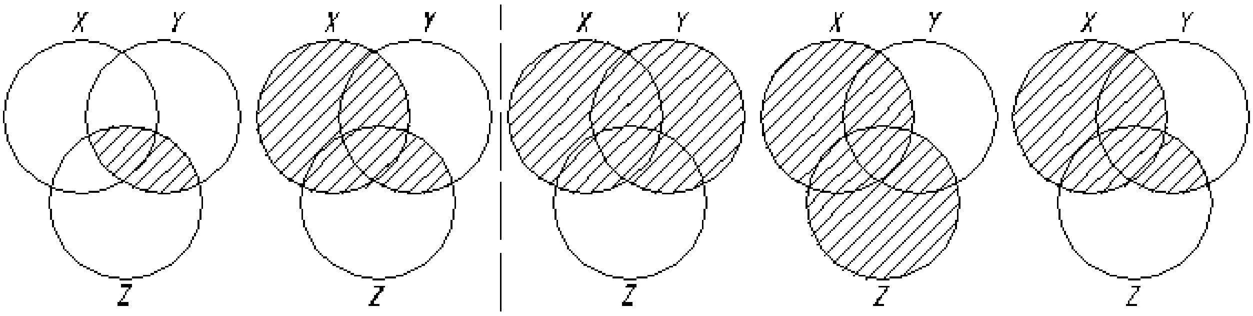


Y U Z   X ∩ (Y U Z)   X ∩ Y   X ∩ Z   (X ∩ Y) U (X ∩ Z)

- Ley distributiva de la unión respecto a la intersección:

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$

Esquema:



Y ∩ Z X U (Y ∩ Z) X U Y X U Z (X U Y) ∩ (X U Z)

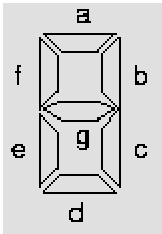
Al usar los diagramas de Venn hemos remarcado que ayudan a *comprobar* la validez de las leyes. Por sí mismos, los diagramas de Venn no constituyen una *demostración* definitiva, aunque sugieren el método a seguir. Aquí nos abstendremos de llevar a cabo tales demostraciones, considerando como suficientes los diagramas reproducidos.[8]

[8] Tales demostraciones se hallan en multitud de manuales. Por ejemplo, puede consultarse la obra de Kaye, D. "*Sistemas booleanos*". Ediciones Alhambra, Madrid, 1970.

ANEXO II: La Lógica en casa. Un ejemplo de Lógica aplicada: decodificador 7 segmentos.

A lo largo del trabajo hemos repetido la idea de la enorme importancia que tiene para nuestra sociedad el Álgebra de Boole aplicada. Son grandes palabras, y por ello pueden sonar exageradas.

Incluyo este Anexo para mostrar que no hay tal exageración. Todos tenemos en casa un despertador digital o un video, cuyos dígitos se caracterizan por estar formados a partir de segmentos, tal como muestra la figura:



Como vemos, cada segmento tiene asignada una letra minúscula, y el conjunto se conoce como “decodificador de 7 segmentos”.

Algo tan simple a primera vista lleva tras de sí todo un dispositivo lógico de cierta envergadura. Para no complicarnos, vamos a diseñar solamente el dispositivo que “enciende” el segmento “a”.

Para empezar, hemos de determinar cuántas “variables entrada” necesitamos para construir una tabla de verdad. Tal tabla debe tener, como mínimo, diez filas (puesto que hay diez dígitos). S tenemos cierta práctica con las tablas de verdad, sabemos que el número de filas viene determinado por 2^n , donde n = nº de variables entrada. Por lo tanto, nos hacen falta como mínimo 4 entradas (pues es la primera potencia de 2 que sobrepasa el valor “10”, que son las filas mínimas necesarias). Hecho esto, construimos la tabla teniendo presente cuándo debe encenderse el segmento “a”: lo hace en 0, 2, 3, 5, 6, 7, 8 y 9. La tabla queda del siguiente modo:

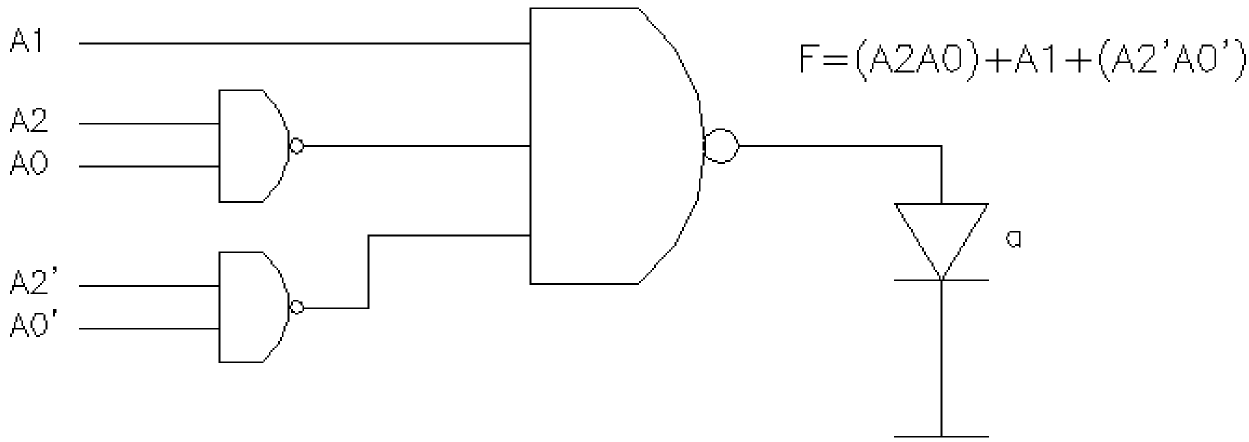
Decimal	A_3	A_2	A_1	A_0	F
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	X
11	1	0	1	1	X
12	1	1	0	0	X
13	1	1	0	1	X
14	1	1	1	0	X
15	1	1	1	1	X

Los valores “x” tanto de la tabla como del correspondiente mapa de Karnaugh indican “estados indiferentes”. A partir del mapa obtendremos la función booleana del segmento “a” ya simplificada:

A1 A0 \ A3 A2	00	01	11	10
00	1	0	x	1
01	0	1	x	1
11	1	1	x	x
10	1	1	x	x

$$F = (A_2A_0)+A_1+(A_2'A_0')$$

Para acabar, aquí ofrecemos el esquema de la función que hemos obtenido:



Cuando se den las condiciones exigidas por la tabla de verdad, se iluminará el LED (*Light Emission Diode*) correspondiente al segmento "a".

Como vemos, este es un tema harto complejo: para lograr la formación de un dígito entero, tendríamos que conocer las tablas, mapas y esquemas del resto de segmentos, y relacionarlos de modo que actuasen coordinadamente. Por no hablar, yendo más allá, si pretendiésemos hacer que contara, al modo de un reloj... Valga esto como muestra de que sólo una herramienta potente y (relativamente) simple ha podido propiciar la revolución digital de finales de siglo XX.

BIBLIOGRAFÍA[9]:

- Arnold, R. "Logic and Boolean Algebra". Prentice-Hall, New York, 1962.
- Bochénski, I. "Historia de la Lógica formal". Editorial Gredos, Madrid, 1967.
- Breuer, S. "Introduction to the theory of sets". Prentice-Hall, New York, 1958.
- Cuesta, L. "Electrónica digital". Editorial McGraw-Hill, Madrid, 1992.
- Freudenthal, G. "The language of Logic". Elsevier, London, 1966.
- Goodstein, D. "Boolean algebra". Pergamon, Oxford, 1963.
- Hoernes, G. "Introducción al álgebra de Boole y a los dispositivos lógicos". Editorial Paraninfo, Madrid, 1972.
- Kneale, W. y M. "El desarrollo de la lógica". Editorial Tecnos, Madrid, 1972.
- Shin, S. "The logical status of diagrams". Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- Stoll, T. "Sets, logic and axiomatic theories". Freeman, New York, 1961.
- Vega, L. "Una guía de historia de la lógica". Uned, Madrid, 1996.
- Whitesitt, J. "Boolean algebra and its applications". Addison Wesley, Reading (Mass.), 1961.

[9] **AGRADECIMIENTO**: Este trabajo no habría sido posible sin la generosidad del Sr. Francisco García Estarlich y el Dr. José Mencia Bravo, del Departamento de Ingeniería Informática y Matemáticas de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de la Universitat Rovira i Virgili (Tarragona). A ellos les debo el acceso a la mayor parte de esta bibliografía, así como su valioso criterio personal.